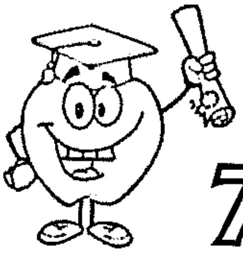


7

الرياضيات

التحليل (5)

2

السنة: الثالثة

الفصل: الثاني

الدكتور: نايف طلي

انتهينا بالمحاضرة السابقة من مراجعة بعض المعلومات

وسنبدأ بهذه المحاضرة بالوحدة الأولى من ممقرنا الدوال ذات التغير المحدود والتي تتضمن:

تمهيد:

1) التجزئة
2) التجزئة الأدق
3) التجزئة المنتظمة
4) نظيم التجزئة

تعريف الدوال ذات التغير المحدود على $[a,b]$

نتائج د.ت.م.

تعميم الدوال ذات التغير المحدود على $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,+\infty[$

1) التجزئة:

اذا كان $[a,b]$ مجالاً مغلقاً حيث $a,b\in\mathbb{R}\,, a<b$:

نقول عن P أنها تجزئة لـ $[a,b]$ إذا كتبت بالشكل:

$$P=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots x_n=b\,;\ x_0<x_1<\dots<x_n,\ \ x_i\in[a,b], i\in\mathbb{N}\}$$

ونرمز لمجموعة كل التجزئات بالرمز $\mathbb{R}[a,b]$.

جبرياً: نقول عن B_i نها تجزئة لـ X اذا تحقق:

$\emptyset\neq X=\cup B_i$ (1

$B_i\cap B_j=\emptyset\,; i\neq j$ (2

مثال: إذا كان $[0,1]$ مجالاً مغلقاً في $\mathbb{R}$ فعندئذ يوجد عدد لانهائي من التجزئات منها:

$$P_1=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}\xRightarrow{\text{بشكل مجالات}}\left[0,\frac{1}{2}\right[\cup\left[\frac{1}{2},1\right]$$

$$P_2=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}$$

$$P_3=\left\{0,\frac{1}{3},1\right\}$$

$$P_4=\{0,1\}$$

2) التجزئة الأدق:

نقول عن تجزئة P' أنها أدق من تجزئة P إذا كانت P' تحوي P أي $P\subset P'$

التجزئة الأخشن: P' أخشن من P إذا وفقط إذا كانت P أدق من P'.

وبالعودة للمثال السابق

P_2 أدق من P_1 لأن $P_1\subset P_2 \Leftarrow P_1$ أخشن من P_2

و P_3 أدق من P_4 لأن $P_4\subset P_3 \Leftarrow P_4$ أخشن من P_3

3) التجزئة المنتظمة(النونية):

نرمز لها $\Delta P = \frac{b-a}{n}$

$$P = \{a = x_0, x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n}, x_2 = x_0 + 2\frac{b-a}{n}, \dots\dots.$$
$$\dots\dots, x_{n-1} = x_0 + (n-1)\frac{b-a}{n}, x_n = x_0 + n\frac{b-a}{n}\}$$

مثال: تجزئة $[0,1]$

$$\Delta P = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$
$$P = \left\{x_0 = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$$

وبالعودة للمثال السابق:

P_1 تجزئة منتظمة حيث $n = 3$.

P_2 تجزئة منتظمة حيث $n = 4$.

ويمكن القول أن P_1 تجزئة منتظمة حيث $n = 1$ أي أخذنا الفرق بين أول عدد وأخر عدد

ملاحظة: إذا كانت الفروق $x_k - x_{k-1}$ متساوية فتدعى التجزئة منتظمة.

---

4) نظيم التجزئة: نعرّف نظيم التجزئة بأنه:

$$\lambda P = \Delta P = \|P\| = \max_{1 \le k \le n}(x_k - x_{k-1})$$

بالعودة للمثال السابق:

$$\Delta P_1 = \frac{1}{2}, \quad \Delta P_2 = \frac{1}{4}, \quad \Delta P_3 = \frac{2}{3}, \quad \Delta P_4 = 1$$

نتيجة: اذا كان P أخشن من P' أي $P \subseteq P' \Leftarrow \Delta P' \le \Delta P$.

تعريف الدالة ذات التغير المحدود: "اختصاراً د.ت.م"

إذا كانت f دالة معرفة على المجال $[a,b]$ وليكن P تجزئة ما للمجال $[a,b]$ بحيث $P \in \mathbb{P}[a,b]$ ($P[a,b]$ مجموعة التجزئات للمجال $[a,b]$) ولنأخذ المجموع المعرف بالشكل:

$$V(f,p) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = |f(x_1) - f(x_0)| + \dots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

ونعرف SUP هذه المجاميع على أنه:

$$\bigvee_a^b f = \sup_{p \in P[a,b]} V(f,p)$$

وندعو $\bigvee_a^b (f)$ التغير الكلي للدالة f على $[a,b]$.

فإذا كان $\bigvee_a^b (f) < \infty$ عندئذٍ نقول إن الدالة f **ذات تغير محدود** على المجال $[a,b]$

فإذا كان $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \infty$ عندئذٍ نقول إن الدالة f **ليس ذات تغير محدود** على المجال $[a,b]$

ملاحظات:

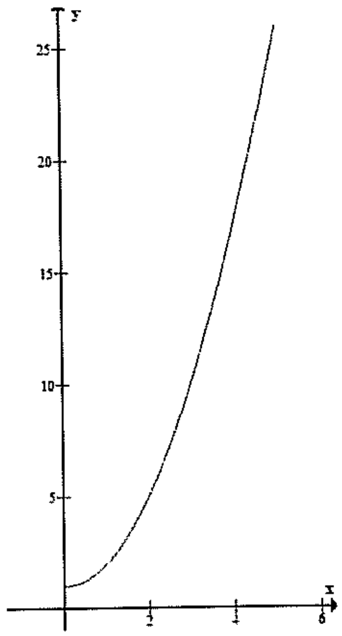
1) يكون $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = 0$ اذا كانت الدالة ثابتة⇐ أن الدالة الثابتة د.ت.م.

2) لا يمكن أن يكون $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = -\infty$ لأننا أخذنا المجاميع بالقيمة المطلقة.

مثال1: أوجد التغير الكلي للدالة f ثم بين فيما اذا كانت f د.ت.م
علماً أن f معرفة كما يلي:

$$f(x) = x^2 + 1 \ ; x \in [0,5]$$

الحل:



لنأخذ التجزئة عشوائية $P = \{x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n = 5\}$

$$V(f,p) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$V(f,p) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$V(f,p) = |{x_1}^2 + 1 - 1| + |{x_2}^2 + 1 - {x_1}^2 - 1| + |{x_3}^2 + 1 - {x_2}^2 - 1| + \cdots + \cdots + |{x_n}^2 + 1 - x_{n-1}^2 - 1|$$

$$V(f,p) = {x^2}_1 + {x^2}_2 - {x^2}_1 + {x^2}_3 - {x^2}_2 + \cdots + 25 - {x^2}_{n-1}$$

$$V(f,p) = 25 = 25$$

$$\Rightarrow \overset{5}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(f) = \sup_{p \in \mathbb{P}[a,b]} \{25\} = 25$$

لأن sup لمقدار ثابت هو هذا المقدار نفسه، ومنه فإن f دالة ذات تغير محدود.

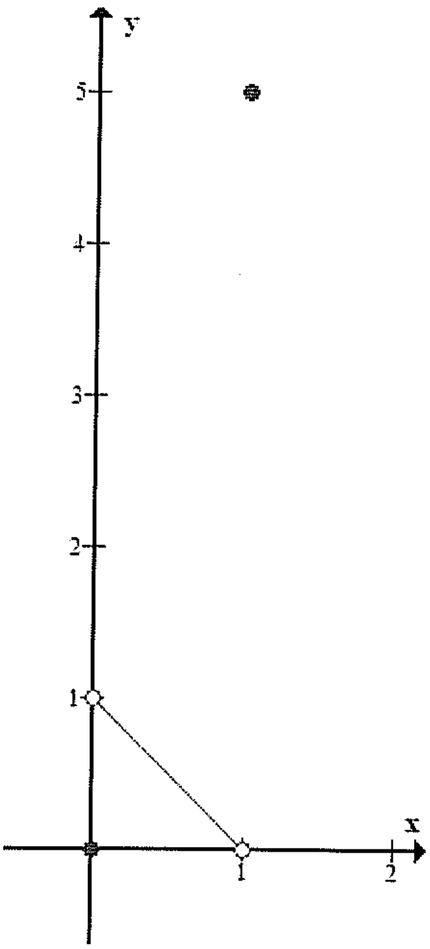
مثال2: أوجد التغير الكلي للدالة المعرفة على $[0,1]$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ 1 - x & ; 0 < x < 1 \\ 5 & ; x = 1 \end{cases}$$

ثم بين هل هي دالة ذات تغير محدود أم لا مع الرسم.

الحل: لنرسم أولاً الدالة f .

لدينا $y = 1 - x$ معادلة مستقيم لرسمه مرة نضع $y = 0$
وعليه فإن $x = 1$ ومرة نضع $x = 0$ وعليه فإن $y = 1$



لكن المستقيم معرف فقط على المجال]1, 0[وبالتالي نأخذ منه قطعة مستقيمة بين$x = 0, x = 1$دون طرفيها.

و لنأخذ P تجزئة ما للمجال $[0,1]$ بالشكل:

$$P = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1\}$$

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_3) - f(x_2)| + \cdots + |f(x_{n-2}) - f(x_{n-3})| + |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$V(f,P) = |1 - x_1 - 0| + |1 - x_2 - (1 - x_1)| + |1 - x_3 - (1 - x_2)| + \cdots .... + |1 - x_{n-2} - (1 - x_{n-3})| + |1 - x_{n-1} - (1 - x_{n-2})| + |5 - (1 - x_{n-1})|$$

$$V(f,P) = |1 - x_1| + |-x_2 + x_1| + |-x_3 + x_2| + \cdots + |-x_{n-2} + x_{n-3}| + |-x_{n-1} + x_{n-2}| + |4 + x_{n-1}|$$

وبما أن $x_k < x_{k+1}$ فإن $x_{k+1} - x_k > 0$ ومنه:

$$V(f,P) = (1 - x_1) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{n-2} - x_{n-3}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (4 + x_{n-1})$$

$$V(f,P) = 5 - 2x_1 + 2x_{n-1} = 5 + 2(x_{n-1} - x_1)$$

$$\Longrightarrow \overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f = \sup_{p \in P[a,b]} \{5 + 2(x_{n-1} - x_1)\}$$

المقدار $(x_{n-1} - x_1)$ نريده أكبر ما يمكن وهذا يتم في حال $x_1 \to 0$ و $x_{n-1} \to 1$ ومنه:

$$\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}} (f) = \sup_{p \in P[a,b]} \{5 + 2(x_{n-1} - x_1)\} = 5 + 2(1 - 0) = 7 < \infty$$

إذاً الدالة f ذ.ت.م.

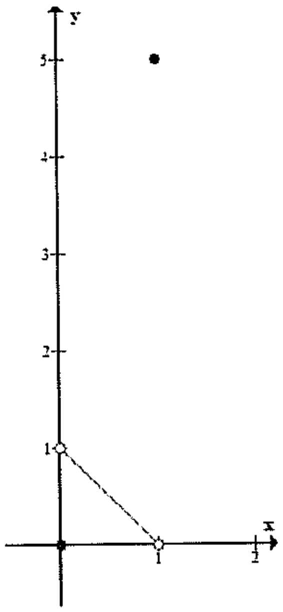
ملاحظة: يمكن حل التمرين السابق اذا أخذنا تجزئة منتظمة عندئذ نحصل على:

$$\Delta P = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_0 = 0\,, x_1 = \frac{1}{n}\,, x_2 = \frac{2}{n}, \ldots\ldots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}\,, x_n = 1$$

$$\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f = \lim_{n \to \infty} \left[5 + 2\left(\frac{n-1}{n} - \frac{1}{n}\right)\right] = 7$$

ملاحظة: يمكن حساب التغير الكلي عن طريق الرسم (عن طريق القفزات) فبالعودة الى المثال السابق



نلاحظ أن الدالة قفزت من الصفر الى 1 (خطوة واحدة)

ثم نزلت مرة أخرى للـ 0 (خطوة واحدة)

ثم قفزت الى الـ 5 (5خطوات)

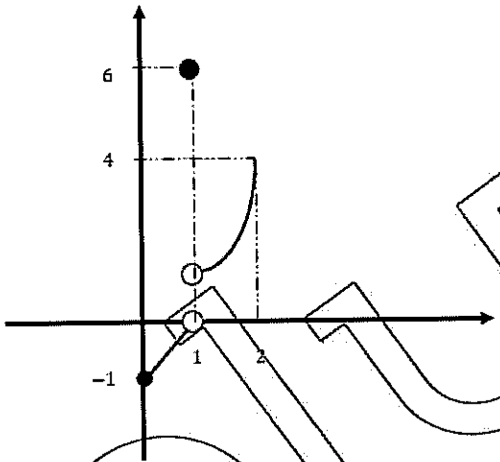
بالجمع ينتج 7 كما تم حسابة في التمرين

ملاحظة: اذا كانت الدالة ذات تغير محدود يكون التغير الكلي مستقل عن التجزئة.

ملاحظة: في الامتحان لا نستطيع أن نحل بهذه الطريقة

مثال(إضافي): (على الطريقة الهندسية)

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & ;0\le x<1 \\ 6 & ;x=1 \\ x^2 & ;1<x\le 2 \end{cases}$$



نلاحظ أنه يقفز من -1 الى 0 (خطوة)

ثم من 0 الى6 (6خطوات)

ثم يعود الى 1 (5 خطوات)

ثم يصعد الى 4 (3خطوات)

$1+6+5+3=15$

أي $\overset{2}{\underset{0}{V}} f=15$

$f(x)=sin\, x$

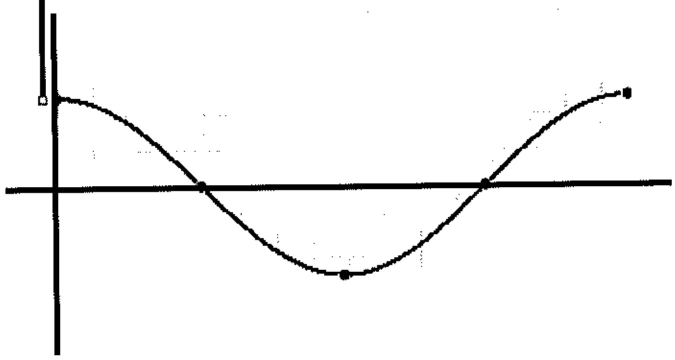
على المجال $[0,2\pi]$

نلاحظ أن الشكل البيان يخرج من 0 ويصل الى 1 ومن ثم ينخفض الى الـ-1 ثم يصعد الى الصفر أي

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{V}} f=\mathbf{4}$$

$\boldsymbol{f(x)=cos\, x}$

على المجال $[0,2\pi]$



نلاحظ أن الدالة تنخفض من ال1 الى $1-$

ثم تعود للـ1

$$\Rightarrow \overset{2\pi}{\underset{0}{V}} f=\mathbf{4}$$

5) نتائج عن د.ت.م:

اذا كانت $\boldsymbol{f}$ د.ت.م على $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$

1. $p \subseteq p' \Longrightarrow \Delta p \geq \Delta p'$
2. $[a',b'] \subseteq [a,b] \Longrightarrow \bigvee_{a'}^{b'}(f) \leq \bigvee_{a}^{b}(f)$
3. $p \subseteq p' : [a,b] \Longrightarrow V(f,p) \leq V(f,p')$
4. $\forall\, P \in \mathbb{P}[a,b] :\ V(f\,,p) \leq \bigvee_{a}^{b} f$
5. $\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, P \in \mathbb{P}[a,b] : \bigvee_{a}^{b} f - \varepsilon \leq V(f\,,p)$ وذلك من تعريف Sup.
6. إذا كانت f دالة ثابتة فإنها ذات تغير محدود ويكون تغيرها الكلي: $\bigvee_{a}^{b} f = 0$.

---

6) تعميم تعريف دالة د.ت.م على مجالات من الشكل:

$$[\boldsymbol{a},\infty[\,,\,]-\infty,\boldsymbol{b}]\,,\,]-\infty,\infty[$$

نقول عن f أنها **دالة ذات تغير محدود على المجال** $[\boldsymbol{a},\infty[$ اذا كانت دالة ذات تعير محدود على أي مجال جزئي $[a,A]$ بحيث $a < A$ وتحقق الشرط:

$$\bigvee_{a}^{\infty} f = \sup_{P\in\mathbb{P}[a,b]} V(f,p) = \lim_{A\to\infty} \bigvee_{a}^{A} f < \infty$$

نقول عن f أنها **دالة ذات تغير محدود على المجال** $]-\infty,\boldsymbol{b}]$ اذا كانت دالة ذات تعير محدود على المجال $[B,b]$ وتحقق الشرط:

$$\bigvee_{-\infty}^{b} f = \lim_{B\to-\infty} \bigvee_{B}^{b} f < \infty$$

نقول عن f أنها **دالة ذات تغير محدود على المجال** $]-\infty,\infty[$ اذا كانت دالة ذات تعير محدود على المجال $[B,A]$ وتحقق الشرط:

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{\substack{A\to\infty \\ B\to-\infty}} \bigvee_{B}^{A} f < \infty$$

انتهت المحاضرة

Math Mad Team

إعداد: عبد الرحمن خانم الجامع، سمير الحاج علي.